25-02-16

Μέτρα Μεταβλητότητας

I	II	III
8	4	1
9	7	3
10	10	10
11	13	17
12	16	19
s^2: 2,5	22,5	110
R: 4	12	18

$= \bar{x} = M$

$$* \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})=0$$

$$** \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i-\bar{x}| : \text{Μέση απόλυτη απόκλιση}$$

$$*** \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = S'^2 = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i-n\bar{x}^2\right] : \text{δειγματική διακύμανση}$$

$$**** S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2\right], \text{-11-}$$

$$\cancel{**** S^2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i-\bar{x})^2 f_i =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{k}x_i^2 f_i - n\bar{x}^2\right] \rightsquigarrow \text{για ομαδοποιημένες μετρήσεις}$$

$$\left.\begin{aligned} ***** S' &= +\sqrt{S'^2} \\ S &= +\sqrt{S^2} \end{aligned}\right\} \text{Δειγματικές τυπικές αποκλίσεις}$$

$$\left.\begin{aligned} &P(\mu-k\sigma \le X \le \mu+k\sigma) \ge 1-\frac{1}{k^2} \\ &P(\bar{x}-ks \le X \le \bar{x}+ks) \ge 1-\frac{1}{k^2} \end{aligned}\right\} \text{Ανισότητα του Chebyshev}$$

- Εύρος: $R = \max x_i - \min x_i$

- Συντελεστής Μεταβλητότητας: $C.V. = \frac{S}{|\bar{x}|} = \frac{S}{|\bar{x}|}\, 100\%$

Πχ: Εργοστάσιο κατασκευάζει σωλήνες ορισμένης διαμέτρου...

$\bar{x}_1 = 10cm$
$S_1 = 0,05$
$\bar{x}_2 = 1cm$
$S_2 = 0,05$

$$CV_1 = \frac{0,05}{10} \cdot 100\% = 0,5\%$$

$$CV_2 = \frac{0,05}{1} \cdot 100\% = 0,05\%$$

Πχ: Βαθμολογία 1: 13, 16, 19 $\rightarrow \bar{x}_1 = 16,\ S_1^2 = 9$

Βαθμολογία 2: 93, 96, 99 $\rightarrow \bar{x}_2 = 96,\ S_2^2 = 9$

$$CV_1 = \frac{3}{96} \cdot 100\% < CV_2 = \frac{3}{16} \cdot 100\%$$

• Ροπές Δείγματος: Έστω $x_1, \dots, x_n$ τυχαίο δείγμα από πληθυσμό X.

i) Δειγματική ροπή κ-τάξης περί το 0: $m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k$, $k=1$: $m_1 = \bar{x}$

ii) Δειγματική κεντρική ροπή κ-τάξης: $V_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^k$, $k_2=2$: $V_2 = S'^2$

iii) Δειγματική τυπική (ή κανονικοποιημένη) ροπή κ-τάξης:

$$a_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \bar{x}}{S'}\right)^k$$

, a_3: συντελεστής λοξότητας ($a_3 = 0 \rightarrow$ συμμετρική)

a_4 = συντελεστής κυρτότητας ($a_4 = 3 \rightarrow$ μεσόκυρτη)

• Ροπογεννήτρια Συνάρτηση: $M_X(t) = E(e^{tX})$

i) $\left.\dfrac{d^k M_X(t)}{dt^k}\right|_{t=0} = E(X^k) = \mu_k$

ii) $M_{aX+b}(t) = E(e^{t(aX+b)}) = e^{bt} M_X(at)$

iii) $M_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = M_{X_1}(t) \cdots M_{X_n}(t)$, $X_1, \dots, X_n$: Ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές

iv) $M_X(t) = M_Y(t) \xLeftrightarrow[\text{Μοναδικότητα}]{\text{Θεώρημα}}$ X και Y έχουν την ίδια κατανομή

• $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ *, $E(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$

$Var(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i)$, για $X_1, \dots, X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές

*: Διακύμανση

• Στατιστικά Δειγματικές Κατανομές

Τυχαίο δείγμα $X_1, \dots, X_n$ από ένα πληθυσμό X είναι οι n τιμές παρατηρήσεις της τυχαίας μεταβλητής X.

$\bar{X} = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

$S^2 = \dfrac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_v - \bar{X})^2$

Έστω A, B υποψήφιοι δήμαρχοι.
A → $n=100$ άτομα → 70 θα ψηφίσουν τον A $(=x)$
p = πιθανότητα εκλογής του A
X = αριθμός των ψηφοφόρων του A

$p = \dfrac{x}{n} = \dfrac{70}{100}$ | $X \sim B(n=100, p)$

• Συναρτήσεις των τυχαίων μεταβλητών $x_1, \ldots, x_n$ ενός τυχαίου δείγματος που χρησιμοποιούνται για να μάθουμε (εκτιμήσουμε) για τις άγνωστες τιμές των παραμέτρων $(p, \mu, \sigma^2, \lambda)$ λέγονται στατιστικά, ή στατιστικές συναρτήσεις και συμβολίζονται

$$T = T(x_1, \ldots, x_n), \quad S = S(x_1, \ldots, x_n)$$

• Μέσες τιμές και διακυμάνσεις των $\bar{x}, s^2$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $x_1, \ldots, x_n$ ένα τυχαίο δείγμα από πληθυσμό X με μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2

i) $E(\bar{x}) = \mu$

ii) $Var(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$

iii) $E(s^2) = \sigma^2$

<u>Απόδειξη</u>: i) $E(\bar{x}) = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}E(x_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \mu$

ii) $Var(\bar{x}) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2}Var(x_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$

iii) $E(s^2) \overset{**}{=} E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right] \overset{*}{=} \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 + n(\bar{x}-\mu)^2 - 2(\bar{x}-\mu)n(\bar{x}-\mu)\right] = \longrightarrow$

$* S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu + \mu - \bar{x})^2 =$

$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i-\mu)-(\bar{x}-\mu)\right]^2 =$

$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 + \underbrace{(\bar{x}-\mu)^2}_{n} - 2(\bar{x}-\mu)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)\right]$

$**$

$E = \left\{\frac{1}{n-1}\left[\sum(x_i-\mu)^2 - n(\bar{x}-\mu)^2\right]\right\}$

$$\Rightarrow = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} E(x_i-\mu)^2 - n E(\bar{x}-\mu)^2\right] = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 - \cancel{n}\frac{\sigma^2}{\cancel{n}}\right] = \sigma^2$$